



TITLE:

不安定プラズマの輸送方程式(続): Part IV Balescuの理論

AUTHOR(S):

西川, 恭治

CITATION:

西川, 恭治. 不安定プラズマの輸送方程式(続): Part IV Balescuの理論. 物性研究 1964, 2(3): 148-159

ISSUE DATE:

1964-06-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/85594>

RIGHT:

§ 1 Prigogine の一般論

Balescu の理論は、不可逆過程統計力学に対する Prigogine の一般論に依拠しているので、まずその要約から始めよう。

出発点は Γ 空間に於ける Liouville 方程式である。

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + iL \right\} f^N(x^N, v^N, t) = 0 \quad (1)$$

$$L = L_0 + \delta L \quad (2)$$

$$iL_0 = v^N \frac{\partial}{\partial x^N}, \quad i\delta L = -\frac{1}{m} \sum_{j>i}^N \frac{\partial \phi_{ji}}{\partial x_j} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial v_j} - \frac{\partial}{\partial v_i} \right] \quad (3)$$

ここに $f^N(x^N, v^N, t)$ は N 体の分布関数、 x^N, v^N は夫々 N ケの粒子の位置及び速度座標の全体を表わす。 m は質量、 ϕ_{ji} は粒子間 potential を表わす。Laplace 変換並びに摂動展開の方法によつて、この方程式の解は次のように書かれる。

$$f^N(x^N, v^N, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_c dz e^{-izt} (L_0 - z)^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\delta L (L_0 - z)^{-1} \right]^n f^N(x^N, v^N, 0) \quad (4)$$

ここに積分路 c は被積分関数のすべての特異点を下に見て $-\infty$ から $+\infty$ までとる。Prigogine 理論の特徴は、この $f^N(x^N, v^N, t)$ 自身の時間変化を追つて行く代りに、その座標空間での Fourier 変換を追つて行く点にある。即ち

$$\begin{aligned} \rho_{KN}(v^N, t) &= \int dx^N e^{-iK^N \cdot x^N} f^N(x^N, v^N, t) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_c dz e^{-izt} \sum_{K^N} \sum_{n=0}^{\infty} \langle K^N | (L_0 - z)^{-1} \left[-\delta L (L_0 - z)^{-1} \right]^n | K^N \rangle \cdot \\ &\quad \times \rho_{KN}(v^N, 0) \end{aligned} \quad (5)$$

ここに

$$\langle K^N | (L_0 - z)^{-1} | K^N \rangle = \prod_{j=1}^N \delta_{K_j, K'_j} \frac{1}{K^N \cdot V^N - z} \quad (6)$$

$$\langle K^N | -\delta L | K^N \rangle = \frac{1}{\Omega m} \sum_{j>i} \prod_{i \neq j, i} \delta_{K_i, K'_i} \sum_K \delta_{K'_j - K_j, K} \delta_{K_i - K'_i, K} \cdot \phi(k) K \cdot \left(\frac{\partial}{\partial V_j} - \frac{\partial}{\partial V_i} \right) \quad (7)$$

Ω は体積、 c は密度 (N/Ω)、そして $\phi(k)$ は ϕ_j の Fourier 変換である。

(4) から (5) への変換は、 Γ 空間上の点の運動を追つていく力学の立場から、粒子間相関の生成消滅の dynamics を追つていく統計力学の立場への移行を表わしている。実際 $\rho_{K^N}(V^N t)$ は、 K^N で指定される粒子間相関を表わしている。特に $K^N = 0$ は、 N 体の速度分布関数に対応していて、粒子間相関の全然ない状態を表わし、又、 $k_i = -K_j \neq 0, K_i = 0 (i \neq j)$ は、 i 番目と j 番目の粒子の間だけの対相関を表わしている。

さて、非可逆過程統計力学に於ては、様々な時間依存性の中から、ある secular な依存性を示す部分だけを拾い出す事が本質的である。このような操作は、(5) の表示法を使う事によつて簡単になされる。Prigogine 等の一般論によれば、空間的に均一な系では、secular な振舞をするのは $K^N = K^{N'} = 0$ とおいたものだけである。すると $\rho_0(V^N t)$ は一般に次のように書かれる。

$$\rho_0(V^N t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{e^{-izt}}{-z} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\Psi(z) \frac{1}{-z} \right]^n \rho_0(V^N 0) \quad (8)$$

但し、 $\Psi(z)$ は、(5) の matrix element ($K^N = K^{N'} = 0$) に於て、中間状態 $|K^{N''}\rangle \langle K^{N''}|$ が $K^{N''} = 0$ とならないようなものの総和である。この方程式を微分して書きかえと

$$\frac{\partial \rho_0(V^N t)}{\partial t} = - \frac{1}{2\pi i} \int_0^t d\tau \int_C dz e^{-iz\tau} \Psi(z) \rho_0(V^N t-\tau) \quad (9)$$

をうる。或いは一体に reduce し、product property

$$\rho_0(V^N t-\tau) = \prod_{j=1}^N f(V_j t-\tau) \quad (10)$$

西川恭治

を仮定すると、次のようにも書かれる。

$$\frac{\partial f(V_a t)}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^t d\tau \int_c dz e^{-iz\tau} \int_{(a)} dV^{N-1} \Psi(z) \prod_{j=1}^N f(V_j t - \tau) \quad (11)$$

ここに $\int_{(a)} dV^{N-1}$ は、 V_a を除く $(N-1)$ ケの速度座標についての積分を表わす。(9)式は典型的な Non-Markoffian 方程式である。ここでもしも記憶が充分短い時間で消え失せるとして、 $\rho_0(V^N t - \tau)$ を $\rho_0(V^N t)$ で置きかえると、次の Smolukowski 方程式(master equation)をうる。

$$\frac{\partial \rho_0(V^N t)}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_c dz \frac{e^{-izt}}{z} \Psi(z) \rho_0(V^N t) \quad (12)$$

安定な気体に対する通常の輸送理論はこの方程式を出発点としている。

§ 2 不安定プラズマに対する Balescu の理論

不安定プラズマに対する Balescu の理論は(11)式を出発点とする。即ち $\phi(k) = 4\pi e^2/k^2$ を入れ、 $\Psi(z)$ に対していわゆる ring 近似を行う。

この近似は

$$e^2 \rightarrow 0, \quad c \rightarrow \infty, \quad e^2 c \sim \text{有限}^*) \quad (13)$$

という極限で有限な寄与を全部集めたものに対応する。この近似では(11)式は次のように書かれる。

$$\frac{\partial}{\partial t} f(Vt) = -i\omega_p^2 \int dK \frac{K}{k^2} \cdot \frac{\partial}{\partial V} \mathcal{Z}_K(Vt) \quad (14)$$

$$\mathcal{Z}_K(Vt) = \frac{k}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_c d\omega e^{-ik\omega\tau} F_K(V\omega t - \tau) \quad (k\omega \equiv Z) \quad (15)$$

ここに $F_K(V\omega t - \tau)$ は次の積分方程式の解として与えられる。

$$e_K(v - \omega) F_K(V\omega t - \tau) = q_K(V\omega) + q_K(V) \int dV_1 \frac{F_K(V_1\omega t - \tau)}{K \cdot (V - V_1) - k\omega} \quad (16)$$

*) この極限のより正確な定義については Part I (8) 式を見よ。

但し

$$\epsilon_K^-(v) = 1 + \int dV_1 \frac{d_K(V_1)}{kv - K \cdot V_1} \quad (v \in S_-) \quad (17)$$

$$d_K(v) \equiv \frac{\omega_p^2}{k^2} K \cdot \frac{\partial}{\partial V} f(V, t - \tau) \quad (18)$$

$$q_K(V, \omega) \equiv \frac{\omega_p^2}{8\pi^3 c k^2} \int dV_1' \frac{K \cdot \left(\frac{\partial}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial V_1} \right) f(V, t - \tau) f(V_1, t - \tau)}{K \cdot (V - V_1) - k \omega} \quad (19)$$

$\epsilon_K^-(v)$ は下半平面 S_- で解析的な複素誘電率で、Part I (3) 式で定義された $\epsilon_K^+(v)$ 及び Part III (9) 式で定義された $\epsilon(K, p)$ とは次の関係にある。

$$\epsilon_K^-(v) = [\epsilon_K^+(v^*)]^* = \epsilon(-K, ikv) \quad (20)$$

よく知られているように、プラズマ振動数及びその damping constant は、 $\epsilon_K^\pm(v) = 0$ の根から求められる。Balescu はそのような根は唯一つしか存在しないと仮定してそれを ζ_\pm で表わし

$$\epsilon_K^\pm(v) = \sigma^\pm(v) \cdot (v - \zeta_\pm) \quad (21)$$

$$\zeta_\pm = \omega_0 \pm i r_0 \quad (22)$$

と表わす。ここに $\sigma^\pm(v)$ は、夫々上、下半平面で解析的で、プラズマ振動に關係した零点はもたない。系の安定性は r_0 の附号できまる。

$$r_0 > 0 \quad \dots\dots\dots \text{不安定}$$

$$< 0 \quad \dots\dots\dots \text{安定}$$

(16) 式は、安定、不安定の区別なく成り立つが、安定の場合には、Guernsey の方法¹⁶⁾で直ちに解けて、その結果は次の様に書かれる。

$$E_K(V\omega t - \tau) = \frac{q_K(V, \omega)}{\epsilon_K^-(v - \omega)} + \pi i \frac{d_K(v)}{k} \int_{-\infty}^{\infty} dV_1 \delta_-(v - V_1) \frac{\phi_1^+(v_1 | \omega) - \phi_2^-(v_1 | \omega)}{\epsilon_K^+(v_1) \epsilon_K^-(v_1 - \omega)} \quad (23)$$

西川恭治

但し、 $\phi_1^+(v_1 | \omega)$ 、 $\phi_2^-(v_1 | \omega)$ は夫々

$$\phi_1^+(v_1 | \omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du \delta_+(v_1 - u) \int dV \delta\left(u - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}}{k}\right) q_{\mathbf{K}}(V; \omega) \quad (24)$$

$$\phi_2^-(v_1 | \omega) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du \delta_-(v_1 - u) \int dV \delta\left(u - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}}{k}\right) q_{-\mathbf{K}}(V; \omega) \quad (25)$$

で与えられ、その v_1 平面上での解析接続は夫々上半平面，下半平面で解析的で、且つ Hölder の条件をみたす。

不安定系の場合の解は、(23)式の解析接続として求められる。即ち、(23)式第二項で $\epsilon_{\mathbf{K}}^+(v_1)$ 及び $\epsilon_{\mathbf{K}}^-(v_1 - \omega)$ の零点の位置が移動して実軸を切ると共に、 v_1 についての積分路も変形してやればよい。かくして得られた解を

(15) 及び (14) に代入すれば、求める kinetic equation がえられる。

ここで、 $q_{\pm \mathbf{K}}(V, \omega)$ に対する表式を代入すると、(23)式は次のように書きかえられる。

$$F_{\mathbf{K}}(V, \omega, t - \tau) = \frac{q_{\mathbf{K}}(V, \omega)}{\epsilon_{\mathbf{K}}(v - \omega)} - \frac{\omega_p^2}{4\pi c k^2} \frac{d_{\mathbf{K}}(V)}{k} \int dV_1 \delta_-(v - v_1) \left\{ \frac{f'_-(v_1 - \omega)}{\epsilon_{\mathbf{K}}^-(v_1)} - \frac{f_+(v_1) - f_-(v_1 - \omega)}{\epsilon_{\mathbf{K}}^+(v_1 - \omega)} \right\}.$$

ここに

$$\overline{f_{\pm}(v)} = \pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du \delta_{\pm}(v - u) \int dV \delta\left(v - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}}{k}\right) f(V; t - \tau) \quad (27)$$

$$\overline{f'_{\pm}(v)} = \pm \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} du \delta_{\pm}(v - u) \int dV \delta\left(v - \frac{\mathbf{K} \cdot \mathbf{V}}{k}\right) \frac{\mathbf{K}}{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{V}} f(V; t - \tau) \quad (28)$$

及びこれらの解析接続、 v_1 の積分路は不安定系では上述の処方で変形したものをとる。

これから更に先に進むに当つて、Balescu は (12) の Markoff 近似を行う。Balescu は、これが使えらる条件として、 $\omega_0 \gg |r_0|$ であればよいとしている。この近似の下では、(15)式は次のように書かれる。

$$\mathcal{F}_{\mathbf{K}}(V, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_C d\omega \frac{e^{-ik\omega t}}{\omega} F_{\mathbf{K}}(V, \omega, t) \quad (29)$$

(2) を (29) に代入したものは、Part III (21), (22) 式で $g(KV_1V_20) = 0$ とおいたものと完全に一致する。但し、notation の間の関係は次表の通りである。

| Part IV | | Part III |
|-----------------------|-------|---|
| $\mathcal{Z}_K(V_1t)$ | | $g_I(KV_1t) + g_{II}(KV_1t)$ |
| $-ik\omega$ | | p |
| $q_K(V\omega)$ | | $-i \int dV_1 \frac{s(KV_1V_1)}{K \cdot (V - V_1) - k\omega}$ |
| c | | n |
| $d_K(V)$ | | $\text{ine } a(KV)$ |
| V_1 | | $-p_1 / ik$ |
| $ik\zeta_{\pm}$ | | $\mp p(\pm K)$ |

以下、Part III とほぼ同様の計算で Part III (27) 式(但し $g(KV_1V_20) = 0$) に到達する。ここで Balescu は、Schwartz の意味の分布関数を考えると称して、次の書きかえを行う。

$$\frac{e^{-ik(v-\zeta_{\pm})t}-1}{(v-\zeta_{\pm})} \psi(v) \sim \begin{cases} 0 & \text{for } \pm r_0 < 0 \\ -\frac{\psi(v)}{v-\zeta_{\pm}} & \text{for } \pm r_0 > 0 \end{cases} \quad (30)$$

このような書きかえが正しくない事は、Part III Appendix II より明らかなので、これ以後の Balescu の計算結果は省略する。

§ 3 Balescu の理論の批判

Balescu の理論は、次の二点で Part III の理論と異っている。

- (i) 対相関の初期値の寄与が無視されている。
- (ii) (26) 式では、(9) の意味までの Non-Markoff ^{効果} がとり入れられている。

実は、この二つの点に関連して、Balescu の考え方は基本的な誤りをおかしていると思われるので、本章では、この二点について考察する。

(i) 初期条件の考察

Prigogine 理論によれば、初期相関の寄与は micro な時間 τ_0 の中に消えてしまう。その条件は、初期相関が短距離である事である。ところでプラズマに於ては、一般に長距離相互作用に基づく長距離相関が存在するが、その kinetic equation への寄与は極く小さいので、通常この条件はみたされていると考えてよい。その結果、安定系では初期相関によらぬ方程式

(Balescu-Lenard の方程式) が導かれた。ところが不安定系では、初期相関は時間と共に成長するわけであるから、Prigogine 理論の結果は理解しにくいところがある。これは Prigogine 理論が、暗黙の中に一種の phase randomness の仮定を行っているためと思われる。この仮定は当然不安定系では再考を要する。

それでは、Prigogine 理論を拡張して、初期相関の寄与を取り入れるとどうなるか。まず、Part I でものべたように、初期相関の寄与が、重要となるのは、粒子間相関の不安定成長が進行している段階 ($t \sim \tau_2 \ll \tau_3$) である。この段階に於ける初期相関の寄与は Part III の結果と全く一致する事が示される。(Appendix)。一方、不安定成長が充分進んで粒子間相関がある常値に近づいた段階では、最早初期相関にはよらなくなるであろう (Part III §5)。その段階では、(12) 式を出発点とする事は正しいと思われるが、今度は次にのべる Non-Markoff 効果が無視できなくなると考えられる。

(ii) Non-Markoff 効果

Balescu は(9)の意味の Non-Markoff 効果が無視出来る条件は $|r_0| \ll \omega_0$ だとしているが、これは(9)式に於ける記憶の喪失が $1/\omega_p$ の程度の時間で起るとする先入観に基づいているためと思われる。(9)式からも明らかのように、Non-Markoff 効果が無視できるのは、 $\Psi(z)$ の poles が $|z| \gg 1/\tau_1$ (τ_1 は $\rho_0(V^N t)$ の緩和時間) にしか存在しない時に限る。ところが Part III §3 の結果が示すように、 $\omega_0 \gg |r_0| \sim 1/k\tau_1$ ではこの条件はみたされない (むしろ $|r_0|$ が充分大きく、 $k|r_0| \gg 1/\tau_1$ の時にみた

されるわけである)。ところが、 $k|r_0| \lesssim 1/\tau_1$ となるのは正に不安定系の特徴である。実際、不安定系が安定化していくに従って $|r_0|$ はいくらでも小さくなるからである。かくして Non-Markoff 効果は、不安定系が安定化して行くメカニズムを調べる上に欠く事のできない効果となる。

Balescu の方法の特徴は、正にこの Non-Markoff 効果を取り扱える点にあつた筈である。このような観点から、次章では特にこの効果について考察する事にしよう。

§ 4 Non-Markoffian Effect の取り扱い。

我々の出発点は(23)式及びその不安定系への解析接続である。Part III § 4 と同様、plasma poles の寄与のみを求める事にしよう。まず、 ϕ_1^+ 及び ϕ_2^- が夫々 v_1 の上, 下半平面で解析的で且つ Hölder の条件をみたす事を用いて、右辺第二項の v_1 についての積分を行うと、安定, 不安定を問わず、次の結果をうる。

$$R_K(V\omega t - \tau) = \frac{1}{\omega - v + \zeta_-} \left\{ -\frac{q_K(V\omega)}{\sigma^-(v-\omega)} + \frac{2\pi i}{k} d_K(V) \left[\frac{\phi_2^-(v|\omega)}{e_K^+(v) \sigma^-(v-\omega)} - \frac{\phi_1^+(\omega + \zeta_-|\omega)}{\sigma^+(\omega + \zeta_-)(v - \zeta_+) \sigma^-(\zeta_-)} \right] \right\} \\ + \frac{1}{\omega - 2ir_0} \frac{2\pi i}{k} d_K(V) \frac{\phi_1^+(\omega + \zeta_-|\omega) - \phi_2^-(\zeta_+|\omega)}{(v - \zeta_+) \sigma^+(\zeta_+) \sigma^-(\zeta_-)} \quad (31)$$

これを(15)式に代入して q_K , ϕ_1^+ , ϕ_2^- にその表式を入れると、次のように書かれる。

$$\mathcal{Z}_K(Vt) = \frac{ik}{8\pi^3 c} \int_0^t d\tau \left\{ e^{-ik(v-\zeta_-)\tau} \left[\frac{f(Vt-\tau)}{\sigma^-(\zeta_-)} - \frac{2\pi i}{k} d_K(V) \frac{R_K(v, t-\tau)}{v - \zeta_+} \right] - \frac{e^{2k\tau r_0}}{v - \zeta_+} \frac{2\pi i}{k} d_K(V) \frac{\overline{f_+(\zeta_+) - f_-(\zeta_-)}}{\sigma^+(\zeta_+) \sigma^-(\zeta_-)} \right\} \quad (32)$$

但し

$$R_K(v, t-\tau) = \frac{\overline{f_-(\zeta_-)}}{\sigma^-(\zeta_-)} (v - \zeta_+) - \frac{\overline{f_+(v) - \frac{\omega_p^2}{k^2}}}{\sigma^+(v)} \frac{2\pi i}{k^2} \frac{\overline{f_+(v) f_-(\zeta_-)}}{\sigma^-(\zeta_-)} \quad (33)$$

この結果を導くに当つて次の関係式を用いた。

$$\overline{f'_+(\zeta_+)} = \overline{f'_-(\zeta_-)} = \frac{1}{2\pi i} \frac{k^2}{\omega_p^2} \quad (34)$$

さて、ここで Non-Markoffian effect というのは、 $|r_0|$ が非常に小さい時に、 r_0 の時間依存性を通して現われる事を思い起そう。そこで $R_K(v, t-\tau)$, $f(v, t-\tau)$, $d_K(V)$ 等が v 及び t の関数としてゆつくり変化すると仮定して、次のように近似する。

$$\frac{R_K(v, t-\tau)}{v - \zeta_+} \approx \frac{R_K(\zeta_+, t)}{v - \zeta_+} \approx \frac{R_K(\zeta_-, t)}{v - \zeta_+} \quad (35)$$

$$\sigma^+(\zeta_+) \approx \sigma^+(\zeta_-) \approx \sigma^-(\zeta_+) \approx \sigma^-(\zeta_-) \approx 2/\omega_0 \quad (36)$$

$$\overline{f_+(\zeta_+)} - \overline{f_-(\zeta_-)} \approx k \int dV \delta[K \cdot V - k\omega_0] f(V) \quad (37)$$

この内、(36), (37) は Part III (29), (31) 式と夫々等価である。これらの近似を行うと (30) は次のように書かれる。

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_K(Vt) \approx & \frac{i}{16\pi^3 c} \int_0^t d\tau \{ e^{-ik(v-\zeta_-)\tau} k\omega_0 f(V) \\ & + \frac{e^{-ik(v-\zeta_+)\tau} - 1}{k(v-\zeta_+)} e^{2kr_0\tau} \pi i (k\omega_0)^2 d_K(V) \int dV_1 \delta[K \cdot V_1 - k\omega_0] f(V_1) \} \end{aligned} \quad (38)$$

最後に、Schwartz の意味の分布関数を考える際の Part III Appendix II で証明した近似式

$$\frac{e^{-ik(v-\zeta_+)\tau} - 1}{k(v-\zeta_+)} \approx -\frac{\pi i}{k} \delta_+[\omega_0 - v] \quad (39)$$

を使い、虚数部分だけを残せば、

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_K(Vt) = & \frac{i}{16\pi^3 c} \int_0^t d\tau \{ e^{-ik(v-\zeta_-)\tau} k\omega_0 f(V) \\ & + \pi^2 k^2 \omega_0^2 \delta[K \cdot V - k\omega_0] e^{2kr_0\tau} \cdot d_K(V) \\ & \int dV_1 \delta[K \cdot V_1 - k\omega_0] f(V_1) \} \end{aligned} \quad (40)$$

となる。ここで、 \underline{r} 及び r_0 はいずれも時刻 $(t-\tau)$ における値を代入したものである。

(40) 式を (14) 式に代入したものが、Non-Markoffian effect もとり入れた kinetic equation である。ここで、第一項は自然放出項を、第二項は拡散項を与える。

この方程式は、Pines-Schrieffer 方程式で個別粒子の分布関数の時間依存性と集団運動のそれとを couple させたものとは全く異なる結果を与える。これは、Part II にものべたように、後者が本質的に Markoff 近似に依拠しているためである。

それでは、(40) 式に現われた Non-Markoffian effect は、安定状態の性質や、輸送係数にどのような影響を与えるであろうか。この問題が最も興味ある問題であるが、これはまだ検討中である。これを調べるための一つの方法は、 $r_0(t-\tau)$ を τ で展開して逐次 Non-Markoffian effect を求めて行く事であり、もう一つの方法は簡単なモデルによる計算であろう。これらについての考察は後の機会に行う事にする。

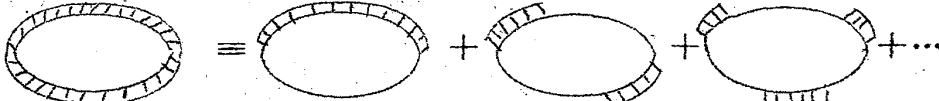
Appendix 初期相関の寄与

(5) 式に於て、 $K^N = 0$ とおいたものへの、 $K^{N'} \neq 0$ の項の寄与を調べるのが、この Appendix の目的である。

まず、Part III と同様、初期相関としては、対相関のみを残し、次のように表わす。

$$\rho'_{K^N}(V^N 0) = \rho_0(V^N 0) + \frac{1}{2} \sum_{K \neq 0} \sum_{j > i} \rho_K^{ji}(V^N 0) \delta'_{Kj} \delta'_{K_i - K} \prod_{i \neq j, l} \delta'_{K_l 0} \quad (A-1)$$

この項の寄与を (13) の極限に於て求める。それには、第一図で表わされる

Ring diagram = 

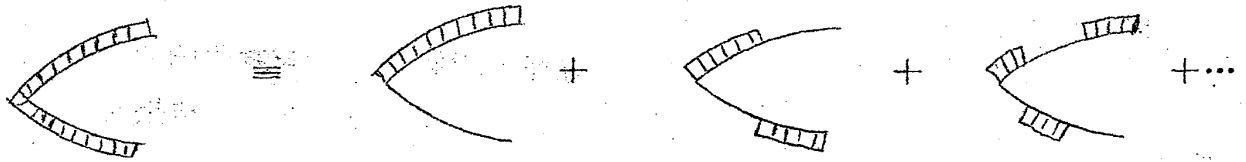
where

$$\text{hatched line} \equiv \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \bigcirc \text{---} + \dots$$

第一図 Ring diagram

西川恭治

ring diagrams のくり返しの他に、第二図で表わされる diagrams が一つ付け加わったものを残せば充分である。



第二図 $\rho_K^{j'}(V^N 0)$ の寄与

これを代入した結果を schematic に書けば、(5)式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \rho_0(V^N t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C dz \frac{e^{-izt}}{-z} \langle 0 | \sum_{n=0}^{\infty} \left[\text{ring diagram} \frac{1}{(-z)} \right]^n | 0 \rangle \\ &= \left\{ \rho_0(V^N 0) + \frac{1}{2} \sum_{K \neq 0} \sum_{j>l} \langle 0 | \text{C-shaped diagram} | j l; K \rangle \frac{1}{K(V_j - V_l) - z} \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=0}^{\infty} \langle j l; K | \left[\text{ring diagram} \frac{1}{K(V_j - V_l) - z} \right]^m | j l; K \rangle \rho_K^{j'}(V^N 0) \right\} \quad (A-2) \end{aligned}$$

但し

$$| j l; K \rangle \equiv | K_j = -K_l = K, K_i = 0 \quad (i \neq j, l) \rangle \quad (A-3)$$


まず (A-2) 式で $m=0$ 以外の項は t が大きい時の漸近的振舞には寄与しないので省略する。次に (A-2) を t で微分すると、右辺は $n \neq 0$ の寄与と $n=0$ の寄与とに分けて次のように書かれる。


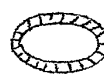
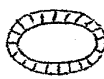
$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0(V^N t)}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \int_C dz e^{-izt} \left\{ \text{ring diagram} i \tilde{\rho}_0(V^N z) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{K \neq 0} \sum_{j>l} \langle 0 | \text{C-shaped diagram} | j l; K \rangle \frac{1}{K \cdot (V_j - V_l) - z} \rho_K^{j'}(V^N 0) \right\} \quad (A-4) \end{aligned}$$

但し $\tilde{\rho}_0(V^N z)$ は $\rho_0(V^N t)$ の Laplace 変換である。

$$\tilde{\rho}_0(V^N z) = \int_0^{\infty} dt e^{izt} \rho_0(V^N t) \quad (A-5)$$

(A-4) の右辺第一項は次の書きかえによつて (9) 式 ($\Psi(z)$ を ring 近似

でおきかえたもの)に還元される。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^t dz e^{-izt} \text{  } i \tilde{\rho}(V^N z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^t dz e^{-izt} \int_0^t d\tau e^{iz\tau} \text{  } \rho_0(V^N \tau) \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^t dz e^{-izt} \text{  } \rho_0(V^N t - \tau) \end{aligned} \quad (A-6)$$

この項の計算は § 3 ~ § 4 に示した通りで、特に $t \sim \tau_2 \ll \tau_3$ では (12) の Markoff 近似の式を使う事ができる。

次に第二項については、ring diagram の寄与を求める際に最後の $\rho_0(V^N 0)$ の部分を $\frac{1}{K(V_j - V_i) - z} \rho_K^{j,i}(V^N 0)$ でおきかえたものを代入すればよい。ここで product property

$$\rho_K^{j,i}(V^N 0) = \rho(KV_j V_i 0) \prod_{i \neq j, i'} f(V_i 0)$$

を仮定して ring 近似での計算結果を入れると、このおきかえは、(16) 又は (23) に於て、 $q_K(V\omega)$ を

$$\int dV_1 \frac{\rho(KV V_1 0)}{K \cdot (V - V_1) - k\omega}$$

としたものに対応する事が分る。この関係を使つて、 $t \sim \tau_2 \ll \tau_3$ という場合に、初期相関の寄与も含めた kinetic equation への寄与を求めると、それは、(16) 又は (23) の $q_K(V\omega)$ を

$$q_K(V\omega) = \int dV_1 \frac{k\omega \rho(KV V_1 0)}{K \cdot (V - V_1) - k\omega}$$

でおきかえたものとなる。その結果は Part III で求めたものと完全に一致する。